Démonstrations suite

1. Calculs commerciaux et financiers : intérêts composés

Théorème : Soit un capital initial C_0, placé à intérêts composés à un taux annuel constant i, la valeur acquise par ce capital après n années est donnée par :

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Démonstration :

— À la fin de la première année : $C_1 = C_0 + C_0 i = C_0(1+i)$.

— À la fin de la deuxième année : $C_2 = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$.

— Par récurrence, supposons vrai à l'ordre n, alors :

$$C_{n+1} = C_n(1+i) = C_0(1+i)^n(1+i) = C_0(1+i)^{n+1}$$

La récurrence établit le résultat pour tout entier naturel n.

2. Résolution d'un problème du premier degré

Théorème : Toute équation linéaire du premier degré, de forme $ax+b=0$ avec $a \neq 0$, admet une unique solution :

$$x = -\frac{b}{a}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} ax+b &= 0 \\ ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

L'unicité découle des équivalences logiques de chaque étape.

3. Proportionnalité

Théorème : Si deux grandeurs x et y sont proportionnelles, alors :

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

Démonstration : Par définition, $y = kx$ avec k constant non nul. Pour deux couples (x_1, y_1), (x_2, y_2), on a directement :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{donc} \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

4. Géométrie dans l'espace

Théorème : Deux droites distinctes perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

Démonstration (par l'absurde) : Soient un plan P et deux droites distinctes $d_1 \perp P$ et $d_2 \perp P$. Supposons d_1 et d_2 sécantes en un point M. Alors, chacune serait perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par M, ce qui est impossible en géométrie euclidienne. Cette contradiction impose que $d_1 \parallel d_2$.