Quelques démonstrations à connaître pour l'oral du CAPLP

M1 – Sens de variation d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I.

Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Démonstration

On utilise le théorème des accroissements finis.

Énoncé :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est une fonction définie et continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$, alors

$$\exists c \in \mathbb{R} \setminus f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I, f'(x) > 0$. Soient a et b deux réels appartenant à I tels que $a < b$. Montrons que $f(a) < f(b)$.

f définie et continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$ donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis :

$\exists c \in]a\,;b[\setminus f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

or $b - a > 0$ et $f'(c) > 0$ donc $(b-a)f'(c) > 0$ donc $f(b) - f(a) > 0$ donc $f(a) < f(b)$

Donc f est strictement croissante sur I.

M2 – Nombre dérivé et tangente à une courbe en un point

Propriété

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, dérivable en $a \in I$.

Alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration

a. La tangente est une droite (non verticale), son équation est de la forme $y = mx + p$ où m et p sont des réels.
   Note : si la tangente est verticale, alors la fonction f n'est pas dérivable en a.
b. $m = f'(a)$ par définition du nombre dérivé.
c. La tangente passe par le point $A\big(a\,;f(a)\big)$ par définition de la tangente
   Donc $y = f'(a)x + p$ où $p \in \mathbb{R}$ et $f(a) = f'(a) \times a + p$
   Par soustraction : $y - f(a) = f'(a)x - f'(a) \times a$ donc $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

M4 – Fonction f définie, pour tout nombre réel x positif ou nul, par $f(x) = \sqrt{x}$

Propriété

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \geq 0$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

a. f n'est pas dérivable à droite en 0.

b. f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Démonstration

a. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

b. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

M7 – Fonction logarithme népérien

Propriété

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration

- Soit a un réel strictement positif et soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(ax) \end{matrix}$

  f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$

  Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exists k \in \mathbb{R} \setminus f(x) = \ln(x) + k$
- En particulier pour $x = 1$, $f(1) = \ln(1) + k$ donc $k = f(1) = \ln(a)$
- On en déduit que : pour tous réels $a > 0$ et $x > 0$, $f(x) = \ln(x) + \ln\,(a)$

  donc $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$

  Ou encore, ce qui revient au même :

  Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

M8 – Fonction logarithme décimal

Propriété

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

Démonstration

- Soit a un réel strictement positif et soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(ax) \end{matrix}$

  f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{a}{axln(10)} = \frac{1}{xln(10)}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exists k \in \mathbb{R} \setminus f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} + k = \log(x) + k$

- En particulier pour $x = 1$, $f(1) = \log(1) + k = k$ et $f(1) = \log(1 \times a) = \log(a)$ donc $k = \log(a)$
- On en déduit que : pour tous réels $a > 0$ et $x > 0$, $f(x) = \log(x) + \log(a)$ donc $\log(ax) = \log(x) + \log(a)$
  Ou encore, ce qui revient au même :
  Pour tous réels a et b strictement positifs, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

M9 – Fonction exponentielle réelle de base e

Propriété

Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Démonstration

- Soient a et b deux réels et soit $f\colon \begin{matrix} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto e^{a+b-x} \times e^x \end{matrix}$
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ où $u(x) = e^{a+b-x}$ et $v(x) = e^x$
  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{a+b-x} \cdot e^x + e^{a+b-x} \cdot e^x = 0$
  Donc f est constante sur $\mathbb{R}$
  Or $f(0) = e^{a+b}$ et $f(b) = e^{a+b-b} \cdot e^b = e^a \cdot e^b$ donc $f(0) = f(b)$ d'où $e^{a+b} = e^a \times e^b$

M10 – Fonction sinus

Propriété

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus.

Démonstration

- On utilise la propriété : $\sin t \underset{0}{\sim} t$ d'où $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{t = \frac{h}{2} \\ h \to 0}} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$
  $\left(\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)$
  or $\lim\limits_{\substack{t = \frac{h}{2} \\ h \to 0}} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$
  $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$

M11 – Fonction f définie, pour tout nombre réel t, par $f(t) = A\ sin(\omega t + \varphi)$, où A, ω et φ sont des nombres réels donnés

Propriété

Pour tous réels a, b, ω, t, il existe des réels $A \in [0\,;2\pi[$ et $\varphi \in [0\,;2\pi[$ tels que

$$a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega\mathrm{t} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Démonstration

On utilise la propriété suivante :

Pour tous réels α et β tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe $\varphi \in [0\,;2\pi[$ tel que $\sin\varphi = \alpha$ et $\cos\varphi = \beta$.

1- Cas particulier : si $a = b = 0$, il suffit de prendre $A = 0$.
2- Sinon :

Pour les réels a et b, où $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, $a^2 + b^2 > 0$.

Posons $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, alors $a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega\mathrm{t} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos \omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin \omega\mathrm{t}\right)$.

Posons $\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, alors $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ donc il existe $\varphi \in [0\,;2\pi[$ tel que $\sin\varphi = \alpha$ et $\cos\varphi = \beta$.

On obtient alors $a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega\mathrm{t} = A \cdot (\sin\varphi \cos\omega t + \cos\varphi \sin\omega t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

(car $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$)

M12 – Primitives d'une fonction définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$
M13 – Intégrale définie

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

Soit F la fonction définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ alors F est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Démonstration

On utilise la formule de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors $\exists c \in [a\,;b] \setminus \int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$.

- Montrons que F est dérivable sur I et que $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.
  Soit $x \in I$, soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $(x + h) \in I$.
  $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$
  D'après la formule de la moyenne, $\exists c \in [x\,;x+h] \setminus \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(c)$.
  De plus, $\lim\limits_{h\to0} f(c) = f(x)$ car c tend vers x et f continue.
  $\lim\limits_{h\to0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$. Donc F est dérivable et $F' = f$.
  F est donc une primitive de f.
- $f(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ donc F s'annule en a.

- Si G est une autre primitive de f s'annulant en a, alors $F' = f$ et $G' = g$ donc $(F - G)' = 0$ donc $F - G$ est une fonction constante.
  Or $(F - G)(a) = F(a) - G(a) = 0$ car $F(a) = G(a) = 0$.
  Donc $F - G$ est la fonction nulle donc $F = G$. Ce qui prouve son unicité.

M16 – Suites arithmétiques et suites géométriques de nombres réels

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ alors :

- Si $q = 1$, $S_n = n \times u_1$
- Si $q \neq 1$, $S_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

Remarque : on pourrait également faire la démonstration pour $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration

- Si $q = 1$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_1$ donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = n \times u_1$.
- Si $q \neq 1$, $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
  Donc $q \times S_n = q \times u_1 + q \times u_2 + \cdots + q \times u_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+1}$
  Donc $S_n - qS_n = u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1 q^n = u_1(1 - q^n)$
  $(1 - q)S_n = u_1(1 - q^n)$ donc $S_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

M22 – Équation trigonométrique, d'inconnue réelle x, de la forme $\cos x = a$, $\sin x = b$ et $\sin(ax + b) = c$ où a, b et c sont des nombres réels donnés

Propriété

Si $a \in [-1\,;1]$, alors l'équation $\cos x = a$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Démonstration

Soit f la fonction suivante : $f\colon \begin{matrix} [0\,;\pi] & \to & [-1\,;1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{matrix}$

f est définie, continue et dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et $\forall x \in [0\,;\,\pi]$, $f'(x) = -\sin x$

$\forall x \in]0\,;\pi[$, $-\sin x < 0$ et $-\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = \pi$ donc f est strictement décroissante sur $[0\,;\,\pi]$, à valeurs dans $[-1\,;\,1]$ et continue. Donc f réalise une bijection de $[0\,;\,\pi]$ dans $[-1\,;\,1]$.

Il en résulte que l'équation $\cos x = a$, avec $a \in [-1\,;1]$ admet une solution unique sur $[0\,;\pi]$.

Remarque : De plus, $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$ *et* $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall a \in [-1\,;1]$, *l'équation* $\cos x = a$ *admet une solution unique* α *sur* $]0\,;\pi[$

l'équation $\cos x = a$ *admet une deuxième solution* β *sur* $]\pi\,;2\pi[$ *définie par* $\beta = 2\pi - \alpha$ *(en effet,* $\cos\beta = \cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$*)*

Toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ *sont alors obtenues en ajoutant* $2k\pi$ *à* α *ou* β.

D'où les solutions : $\alpha + 2k\pi, \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

M23 – Vecteurs du plan. Somme de vecteurs, multiplication par un réel
M24 – Produit scalaire dans le plan
M25 – Représentation géométrique des nombres complexes.

Propriété 1 : inégalité triangulaire

Voici une démonstration possible en passant par les complexes

Soient z l'affixe de $\vec{u}$ et z' l'affixe de $\vec{v}$, il s'agit de montrer que $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

Démonstration

$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'}) = (z+z')(\bar{z}+\overline{z'}) = z\bar{z}+z\overline{z'}+z'\bar{z}+z'\overline{z'}$

Or $z\bar{z} = |z|^2$ et $z'\overline{z'} = |z'|^2$. De plus $z\overline{z'} = \overline{z'\bar{z}}$ donc $z\overline{z'}+z'\bar{z} = 2Re(z\overline{z'})$

Donc $|z+z'|^2 = |z|^2+|z'|^2+2Re(z\overline{z'})$

Or pour tout nombre complexe Z, $Re(Z) \leq |Z|$ (car $a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}$)

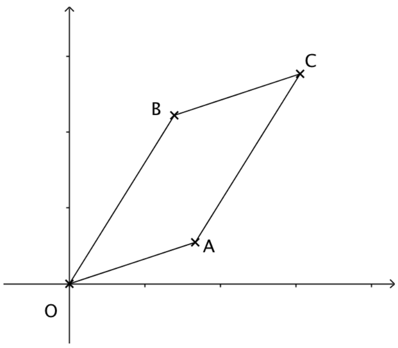
Donc $|z+z'|^2 \leq |z|^2+|z'|^2+2|z\overline{z'}| = |z|^2+|z'|^2+2|z||\overline{z'}| = |z|^2+|z'|^2+2|z||z'| = (|z|+|z'|)^2$

Donc $|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2$ donc $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

Propriété 2 : égalité du parallélogramme

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des mesures des côtés est égale à la somme des carrés des mesures des diagonales.

Voici encore une démonstration à l'aide des complexes



Soient z l'affixe de A et z' l'affixe de B, alors l'affixe de C est $z+z'$ et celle de $\overrightarrow{AB}$ est $z'-z$.

Il s'agit de montrer que $|z+z'|^2+|z'-z|^2 = 2(|z|^2+|z'|^2)$.

Démonstration

$|z+z'|^2+|z'-z|^2 = (z+z')(\overline{z+z'})+(z'-z)(\overline{z'-z})$

$= (z+z')(\bar{z}+\overline{z'})+(z'-z)(\overline{z'}-\bar{z})$

$= z\bar{z}+z\overline{z'}+z'\bar{z}+z'\overline{z'}+z'\overline{z'}-z'\bar{z}-z\overline{z'}+z\bar{z} = 2(z\bar{z}+z'\overline{z'})$

$= 2(|z|^2+|z'|^2)$.

Remarque : Cela peut se traduire par $OA^2+OB^2+AC^2+BC^2 = 2(OC^2+AB^2)$ *mais aussi par* $OA^2+OB^2 = OC^2+AB^2 = 4OI^2+AB^2$ *où* I *est le milieu de* $[AB]$ *(*I *est aussi le milieu de* $[OC]$*).*

L'égalité $OA^2+OB^2 = 4OI^2+AB^2$ *est mieux connue sous le nom d'égalité de la médiane (dans le triangle* OAB *avec* $[OI]$ *médiane issue de* O*).*

M24 – Produit scalaire dans le plan

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient x et y deux vecteurs, $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Note : $(x|y)$ *est le produit scalaire des vecteurs* x *et* y*.*

Démonstration

- Si $\|x\| = 0$ alors $x = 0$, donc $(x|y) = 0$, l'inégalité est vérifiée.
- Sinon, soit $f : \lambda \mapsto f(\lambda) = (\lambda x + y|\lambda x + y) = \|\lambda x + y\|^2$
  $f(\lambda) = \lambda^2(x|x) + \lambda(x|y) + \lambda(y|x) + (y|y) = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \|y\|^2$
  Comme $\|x\| \neq 0$, f est un trinôme du second degré en λ et de plus, $\forall\lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda) \geq 0$ car $f(\lambda) = \|\lambda x + y\|^2$
  Donc son discriminant est négatif ou nul.
  $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$
  $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (x|y)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \Leftrightarrow |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Conséquence : inégalité triangulaire $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Démonstration

$\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

Or $(x|y) \leq |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Donc $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

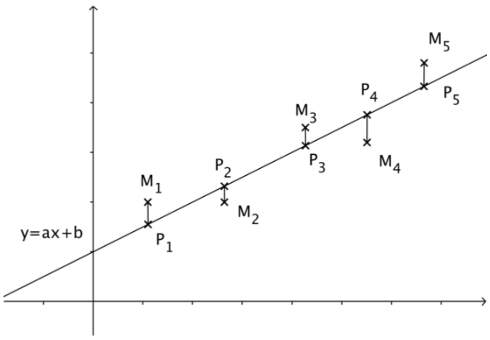
M27 – Ajustements affines pour une série statistique à deux variables

La droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés (calculatrice ou tableur) passe par le point $G(\bar{x}\,;\bar{y})$.

Démonstration

- Principe de la méthode

$M_i(x_i\,;y_i)$: nuage de points



On cherche a et b tels que la droite d'équation $y = ax + b$ minimise $\sum_{i=1}^{n} P_iM_i^{\ 2}$

- Coordonnées de M_i : $(x_i\,;y_i)$ et P_i : $(x_i\,;ax_i + b)$

Donc $\sum_{i=1}^{n} P_iM_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2y_i(ax_i + b) + (ax_i + b)^2)$
$= \sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2) = f(a, b)$ fonction des deux variables a et b, x_i et y_i étant donnés.

- Pour que la fonction f admette un minimum, il est nécessaire que $\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 0$
  Or $\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(-2y_i + 2ax_i + 2b)$
  $\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(-2y_i + 2ax_i + 2b) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(-y_i + ax_i + b) = 0$
  $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} b = \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow nb = \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
  $\Leftrightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$ donc le point $G(\bar{x}\,;\bar{y})$ appartient nécessairement à la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise $\sum_{i=1}^{n} P_iM_i^{\ 2}$.

De plus,
$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(-2x_iy_i + 2ax_i^2 + 2bx_i)$
$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(-2x_iy_i + 2ax_i^2 + 2bx_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i - x_iy_i) = 0$

M28 – Expériences aléatoires, probabilités élémentaires.

Propriété

Pour tous événements A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Démonstration

- Définition d'une probabilité sur Ω :
  $p: \mathcal{P}(\Omega) \to [0\,;1]$ telle que : 1) $p(\Omega) = 1$
  2) Si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
  Remarque : $A \cap B = \emptyset$ se traduit par « A et B sont des événements incompatibles (ou des ensembles disjoints) ».
- $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ (1)
  avec $(A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ incompatibles
  De même (2) $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ avec $(A \cap B)$ et $(\bar{A} \cap B)$ incompatibles
- $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ (3)
  les événements $(A \cap B)$, $(A \cap \bar{B})$ et $(\bar{A} \cap B)$ étant deux à deux incompatibles
- D'après (1) : $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$
  (2) : $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$
  (3) : $p(A \cup B) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B)$
  Donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

M29 – Fluctuation d'une fréquence relative à un caractère, selon des échantillons de taille n fixée

M30 – Stabilisation relative des fréquences vers la probabilité d'un événement quand la taille n de l'échantillon augmente.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

La démonstration est assez longue. Il convient donc d'en comprendre l'esprit et de retenir qu'une partie de la démonstration qui pourra être réalisée devant le jury.

Démonstration

1- Contexte de la démonstration

Dans une population donnée, on connaît la proportion p d'un caractère. On répète n fois, de façon indépendante, le choix d'un individu dans cette population de façon à constituer un échantillon de taille n. On aimerait alors connaître, ou du moins estimer, sur cet échantillon, la fréquence f du caractère dans cet échantillon.

Si S_n est la variable aléatoire égale au nombre de personnes possédant le caractère étudié dans notre échantillon, S_n suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

On cherche donc à estimer la fréquence $F_n = \frac{S_n}{n}$.

2- Définitions préalables à la démonstration

(1) Lorsqu'on répète n fois la même expérience aléatoire, on obtient une série de n succès ou échecs que l'on appelle échantillon de taille n.

Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, les fréquences de succès ou d'échecs calculées pour chaque échantillon varient d'un échantillon à l'autre.

Ce phénomène s'appelle la fluctuation d'échantillonnage.

(2) Soit S_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ et $0 < \alpha < 1$. Dire que $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation au seuil $1-\alpha$ signifie que $P(a < S_n < b) = 1-\alpha$.

3- Propriété $\mathcal{P}_1$ à démontrer

Si S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, alors la fréquence de succès $F_n = \frac{S_n}{n}$ vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Où u_α vérifie $P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ pour Z_n suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Démonstration de $\mathcal{P}_1$:

D'après le théorème de Moivre-Laplace, pour tous réels a et b (avec $a \leq b$),

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = P(a \leq Z_n \leq b) \qquad (i)$$

Où Z_n suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

En d'autres termes, lorsqu'on travaille sur un échantillon très grand, on peut faciliter ses calculs en remplaçant la loi binomiale par la loi normale (les statisticiens parlent de convergence en loi). Z_n suit donc une loi normale centrée réduite.

Note
En pratique, les effectifs infinis n'existent pas. Mais on considère que pour $n \geq 30$ l'approximation est valable. D'autres conditions existent mais il n'y a pas vraiment de consensus. On donne généralement $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. Ces conditions étant très peu contraignantes, cela conduit à des à-peu-près…

Nous allons manipuler les inégalités dans le terme de gauche dans l'égalité précédente pour faire intervenir F_n. Pour cela, il suffit d'isoler S_n puis de diviser par n :

$$P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = P\left(np + a\sqrt{np(1-p)} \leq S_n \leq np + b\sqrt{np(1-p)}\right)$$

$$= P\left(p + a\frac{\left(\sqrt{p(1-p)}\right)}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{n} \leq p + b\frac{\left(\sqrt{p(1-p)}\right)}{\sqrt{n}}\right)$$

D'après (i), nous obtenons la version du théorème de Moivre-Laplace pour la fréquence F_n :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(p + a\frac{\left(\sqrt{p(1-p)}\right)}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + b\frac{\left(\sqrt{p(1-p)}\right)}{\sqrt{n}}\right) = P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

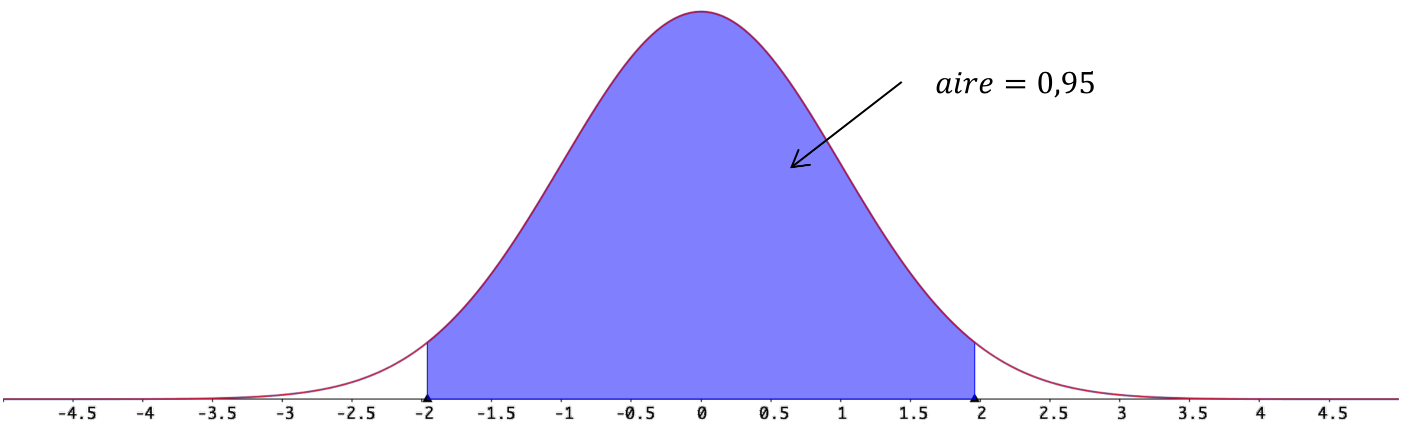
Où Z_n suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Le résultat énoncé dans le corollaire correspond au cas particulier $a = -u_\alpha$ et $b = u_\alpha$, où u_α est l'unique réel positif vérifiant $P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

4- Corollaire recherché

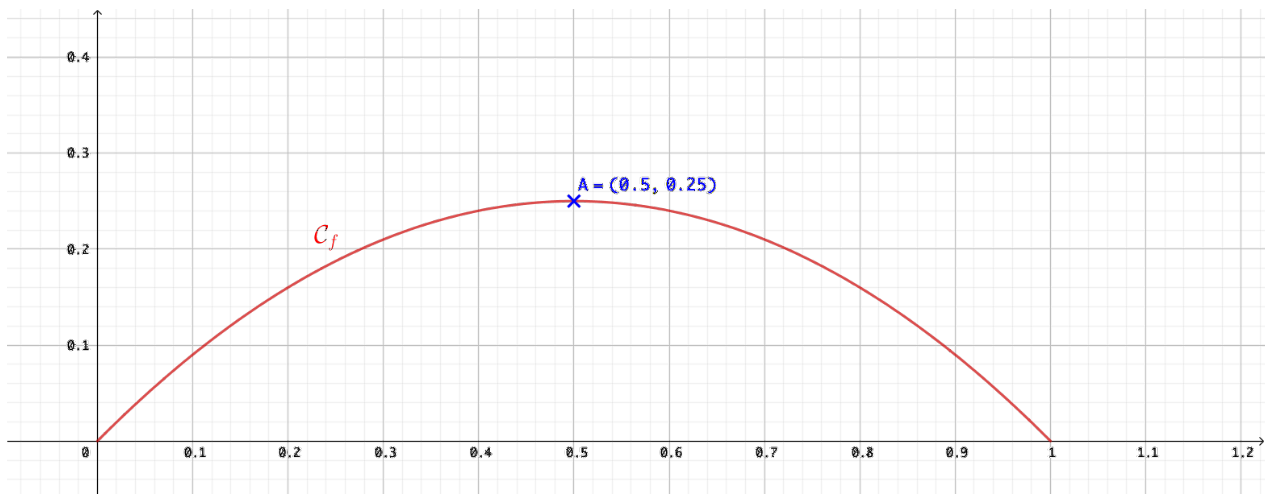
Lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% ($95\% = 0{,}95$ ce qui correspond à $\alpha = 0{,}05$) est environ :

$$I_1 = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$



5- Inclusion de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% au sein de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%

L'étude de $f: \begin{matrix} [0\,;1] & \to & [0\,;1] \\ x & \mapsto & x(1-x) \end{matrix}$ révèle que f admet un maximum pour $x = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1/4$



Donc $0 < 1{,}96\sqrt{p(1-p)} \leq 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4}} < 1$

Donc $0 < \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $0 > -\frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} > -\frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc $p < p + \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < p + \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $p > p - \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} > p - \frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc $p - \frac{1}{\sqrt{n}} < p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient I_1.

M32 – Fonction polynôme du second degré

Solutions d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où b et c sont des réels ; a est un réel non nul

$$P(x) = 0 \iff ax^2 + bx + c = 0$$

On rappelle que nous pouvons écrire $P(x)$ sous sa forme canonique

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

En développant la forme canonique de $P(x)$ puis en identifiant les termes, on obtient les expressions de α et β en fonction de a, b et c

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = ax^2 - 2\alpha a \cdot x + (a\alpha^2 + \beta) = ax^2 + bx + c$$

Donc $\begin{cases} a = a \\ -2\alpha a = b \\ a\alpha^2 + \beta = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = a \\ \alpha = \frac{-b}{2a} \\ a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + \beta = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = a \\ \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \frac{ab^2}{4a^2} + \beta = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = a \\ \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \beta = c - \frac{b^2}{4a} \end{cases} \iff \begin{cases} a = a \\ \alpha = \frac{-b}{2a} \\ \beta = \frac{4ac-b^2}{4a} \end{cases}$

Alors la forme canonique de $P(x)$ devient

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

Alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ donc $P(x) = 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

Un carré étant toujours positif, les solutions de cette équation dépendent donc du signe de Δ.

Trois cas sont alors possibles :

<u>1er cas : $\Delta < 0$</u>

L'équation n'admet aucune solution réelle car $-\Delta > 0$ et la somme de nombres positifs ne peut être nulle

<u>2e cas : $\Delta = 0$</u>

L'équation devient $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Elle admet alors une unique solution réelle $x = \frac{b}{2a}$

<u>3^e cas : $\Delta > 0$</u>

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

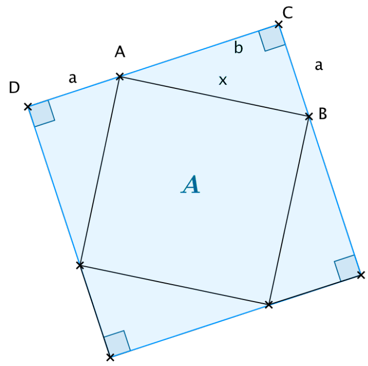
L'équation admet donc deux solutions réelles.

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \\ \text{ou} \\ x_2+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

M33 – Théorème de Pythagore et sa réciproque

Théorème de Pythagore

Démonstration



L'aire totale de la figure peut être calculée de deux manières :

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $A+4\times\frac{ab}{2}=x^2+2ab$
  Donc $x^2+2ab=a^2+2ab+b^2$ donc $x^2=a^2+b^2$